VII Die Widerlegung der Unentscheidbarkeit von Gödel's Satz [1]

Dez. 2022. Kurt Gödel konstruierte 1931 einen Satz der Theorie der natürlichen Zahlen für den weder ein Beweis noch eine Widerlegung existieren soll, obwohl er wahr ist.
Die wahre Bedeutung der 0, „nichts“[2], eröffnet neue Möglichkeiten der Beweisführung. Sätze über „nicht-Existenz“ lassen sich durch äquivalente Sätze über „nichts“ beweisen. Durch „nichts“ der Beweisführung wird Gödels Satz, der auf der „nicht-Existenz“ seines Beweises beruht, bewiesen und entschieden. Die Theorie der natürlichen Zahlen ist vollständig, unvollständig ist das Axiomensystem das Gödel voraussetzte. Durch das Axiom des „nichts“ der Beweistheorie wird es vervollständigt.

1. Einleitung

Kurt Gödel publizierte einen fundamentalen Artikel „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I (1931)“. Er konstruierte einen **Satz G der Theorie der natürlichen Zahlen, der über sich selbst aussagt, daß für alle axiomatisch gegründeten Sequenzen von Formeln gilt, daß sie ihn nicht beweisen können. Für diesen Satz wiederum fordert Gödel in seinem 1. Unvollständigkeitssatz, daß weder ein Beweis noch eine Widerlegung durch eine Sequenz existiert, obwohl er wahr ist**. Der 2. Unvollständigkeitssatz sagt aus, daß auch die Widerspruchsfreiheit der Theorie ist nicht beweisbar sei. **Gödel behauptet weiter, daß zusätzliche Axiome nicht dazu führen könnten, daß G entschieden werden kann.**
In dem vorliegenden Artikel wird gezeigt, daß ein solches Axiom doch formuliert werden kann.
Der Ausgangspunkt ist die Äquivalenz der Begriffe „nichts“ und „nicht-Existenz“. Äquivalente Aussagen über die Existenz von „nichts“ und die „nicht-Existenz“ beweisen sich gegenseitig. Dadurch ergibt sich eine neue Möglichkeit der Beweisführung, die essenziell ist für den Beweis und die Entscheidbarkeit von Gödel's Satz.
Entscheidend ist, daß das „nichts“, das im 16. Jahrhundert aufgrund von Vorbehalten gegen das metaphysische Nichts aus der Mathematik verdrängt wurde,.wieder aufgenommen wird.

2. Gödel's Satz und die Unvollständigkeitssätze

Ein Beweis besteht aus einer Sequenz von Formeln deren erste ein Axiom oder eine Regel ist, die letzte ist der bewiesene Satz. **Gödel hat die Beweisführung durch natürliche Zahlen, die sog. Gödelnummern, codiert,** sie werden durch ⌜ ⌝ gekennzeichnet. Ein Satz wie auch eine Sequenz werden jeweils durch eine natürliche Zahl x abgebildet.
Gödels Satz G ist dadurch definiert, daß für alle Sequenzen gilt: sie können den Satz mit der Gödelnummer ⌜G⌝ nicht beweisen. G macht also eine Aussage über sich selbst, das ist dadurch möglich, daß sich der Satz durch die Gödelnummer ⌜G⌝ zitiert. Formal wird diese Aussage durch (1) mit folgender Bedeutung der Zeichen ausgedrückt: $\forall$ (für alle), $\neg$ (nicht), $\vdash$ (Beweis).
Eine Sequenz besitzt eine Gödelnummer x > 1.
(1) $\mathbf{G \equiv \forall\, x > 1 : \neg\,(x > 1 \vdash \ulcorner G \urcorner)}$
Wird vorausgesetzt, daß G durch eine Sequenz beweisbar ist, so widerspricht dies dem Satz selbst. Wird vorausgesetzt, daß G widerlegbar ist, dann wäre seine Negation beweisbar. Diese sagt aus, daß

1 Die Thematik einschließlich der Literaturnachweise sind Teil des Buches von Gert Treiber, *„Nichts“ Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik*, Cuvillier Verlag, 2020
2 Artikel I Empirische Tatsache: Die 0 ist keine Zahl sondern repräsentiert „nichts“

eine Sequenz existiert, die G beweist. Auch diese Feststellung ist widersprüchlich.
Der 1. Unvollständigkeitssatz sagt aus, daß **Gödel's Satz ist durch eine Sequenz nicht entscheidbar ist. Dieser Satz ist und bleibt richtig.** Die Widerlegung der Unentscheidbarkeit unter 3, erfolgt durch „keine Sequenz“.
Bei der Konstruktion von Gödel's Satz wurde Widerspruchsfreiheit der einzelnen Schritte vorausgesetzt. Daraus folgt Gödel's Satz. Aus einem Beweis der Widerspruchsfreiheit würde deshalb der Beweis von G folgen. Dieser Beweis ist nach Gödel nicht möglich, folglich ist auch ein Beweis der Widerspruchsfreiheit ausgeschlossen, wie der 2. Unvollständigkeitssatz aussagt.

3. Axiom des „Nichts“ des Beweisführung

Der Beweis von Gödels Satz erfordert ein Axiom. Die 0 ist der Ausgangspunkt dieser Voraussetzung. Das Zeichen markiert eine Leerstelle in der Folge von Ziffern einer Stellenwertzahl sowie in Gleichungen, und repräsentiert „nichts“ der Zahlen[2]. Auch die Stelle, an der eine Sequenz steht ist leer, wenn ein Satz nicht beweisbar ist. Die leere Beweisstelle kann ebenfalls mit 0 gekennzeichnet werden, was „nichts“ der Beweisführung entspricht. Die Definition der 0 wird um diese Bedeutung erweitert:
(2) Definition: 0 ist das Zeichen, das „nichts“ der Beweisführung, „keine Sequenz“, repräsentiert.
Das **Axiom des „nichts“ der Beweisführung** wird durch (3) formuliert. $\exists$ steht für “es existiert”, $\mathbb{Z}$ ist ein Zeichen, der griechische Buchstaben Γ bezeichnet eine Sequenz, φ_{np} kennzeichnet einen Satz, der durch eine Sequenz nicht beweisbar ist.
(3) $(\exists \mathbb{Z}: \mathbb{Z} = 0) \vdash \neg\, (\exists \Gamma: \Gamma \vdash \varphi_{np})$
Das Axiom ist intuitiv verständlich. **Die Voraussetzung der Existenz des „nichts“ der Beweisführung beweist die „nicht-Existenz“ eines Beweises von φ_{np} .**
Alle falschen sowie Gödels wahrer Satz sind Sätze φ_{np} .

4. Die Widerlegung der Unentscheidbarkeit von Gödel's Satz

Das Axiom wird auf Gödels Satz G angewandt und auf Gödelnummern abgebildet. Aus dem variablen Zeichen $\mathbb{Z}$ und der Variablen Γ wird die Zahlenvariable x. Die 0 besitzt gemäß Gödel die Gödelnummer 1[3]. Damit erhält man (4) aus (3):
(4) $\exists x: x = 1 \vdash \neg\,(\exists x > 1: x > 1 \vdash \ulcorner G \urcorner)$
Die Voraussetzung der Existenz der Gödelnummer x = 1 beweist: Es trifft nicht zu, daß eine Gödelnummer x > 1 existiert, die den Satz mit der Gödelnummer ⌜G⌝ beweisen würde.
Gödel's Satz (1) läßt sich äquivalent auch durch (5) formulieren: Es existiert keine Sequenz die G beweisen könnte:
(5) $G = \neg\,(\exists x > 1: x > 1 \vdash \ulcorner G \urcorner)$
Dieser Satz stimmt mit der rechten Seite von ' $\vdash$ ' in (4) überein. **Aus (4) und (5) folgt (6):**
(6) $\exists x: x = 1 \vdash G$
Die Existenz der Gödelnummer 1 beweist Gödel's Satz.
Dieses überraschende Resultat verdient eine Erklärung. Dazu wird (6) decodiert:
Die Existenz von “nichts” der Beweisführung, beweist den Satz G, für den die “nicht-Existenz” seines Beweises durch eine Sequenz gilt.
Dem entspricht, daß der Beweis von G auf “nichts”, d.h. “keine(r) Sequenz”, beruht.
Die Widerlegung von G entspräche dem Beweis seiner Negation. Dann müßte gelten:
$\exists x: x = 1 \vdash \exists x > 1: x > 1 \vdash \ulcorner G \urcorner$. Diese Aussage ist falsch.
Die Negation von G kann nicht bewiesen werden.
G ist entschieden, die Unentscheidbarkeit ist widerlegt.
Der 2. Unvollständigkeitssatz impliziert, daß aus dem Beweis der Widerspruchsfreiheit der nicht

---

3 Die 1 ist das neutrale Element der durch Gödelnummern codierten Beweisführung. Der Faktor 1 beeinflußt die Gödelnummer 'Γ' des Beweises nicht, die Gödelnummer 1 repräsentiert „keine Sequenz“, „kein(en) Beweis“.

mögliche Beweis von G folgt und deshalb ein Widerspruch vorläge. Der Beweis von G ist nicht mehr widersprüchlich, der Beweis der Widerspruchsfreiheit ist also nicht mehr ausgeschlossen. Gödel hat für seine Beweisführung eine Sequenz, d.h. $x > 1$ vorausgesetzt, unter dieser Prämisse sind die „Unvollständigkeit“ssätze richtig, d.h. aus Gödels Axiomensystem kann sein Satz tatsächlich nicht entschieden werden. Er hat mit seinen Sätzen aber nicht die Unvollständigkeit der Theorie der natürlichen Zahlen bewiesen. „Unvollständigkeit“ im Zusammenhang mit diesen Sätzen wird deshalb in Anführungszeichen gesetzt. Die Widerlegung der Unvollständigkeit beruht auf $x = 1$, d.h. „keine Sequenz”. Gödel hat postuliert, daß weitere Axiome seinen Satz nicht entscheiden könnten. **Das neue Axiom des „nichts“ der Beweisführung widerlegt ihn. Nicht die Theorie der natürlichen Zahlen ist unvollständig, sondern das Axiomensystem, das Gödel vorausgesetzt hat.**

5. Kommentar

- Gödel's Satz ist gemäß der bisherigen Theorie wahr aber nicht beweisbar. **Semantische Wahrheit** wird deshalb im Vergleich mit **syntaktischer Beweisbarkeit** als das stärkere Konzept gesehen. Dieser **Unterschied kann** durch die „Unvollständigkeit”ssätze **nicht mehr begründet werden.**
- Die gegenwärtige Theorie macht auch ein Non Standard Modell mit „Non Standard natürlichen Zahlen” n_{nst} notwendig, in dem die Nicht-Beweisbarkeit von G „falsch“ und damit G „beweisbar” ist. Die in Anführungszeichen gesetzten Begriffe verdeutlichen, daß fragliche Aussagen vorliegen. Sie sind nicht decodierbar, sodaß die Begriffe „falsch“ und „beweisbar” nicht zu deuten sind. Die n_{nst} enthalten die Standard natürlichen Zahlen als Teilmenge, sind darüber hinaus aber wesentlich umfangreicher. Dieses obskure **Non Standard Modell der natürlichen Zahlen** existiert gemäß der hier vorgelegten Beweisführung **nicht.** Da Gödel's Satz sowohl semantisch wahr als auch syntaktisch beweisbar ist, **wird** es **überflüssig.**
- Durch Hilbert's Programm sollte für alle Sätze der Mathematik bewiesen werden, daß sie widerspruchsfrei und entscheidbar seien. Das Programm scheiterte an Gödel's Unvollständigkeitssätzen. Nach der Widerlegung der Unentscheidbarkeit ist **Hilbert's Programm wieder möglich.**